



ROLUL PROBLEMELOR GENERALE ÎN ORGANIZAREA ÎNVĂȚĂRII AUTOREGLATE

THE ROLE OF GENERAL PROBLEMS IN THE ORGANIZATION OF SELF-REGULATED LEARNING

Mitrofan CIOBAN,

academician,

Universitatea de Stat din Tiraspol,

Antonina CIOBAN-PILEȚCAIA,

Universitatea Nistreenă,

Larisa SALI,

Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract: *In the present article, we examine some aspects regarding the role of mathematical problems of general character in the organization process of students' individual activity, and outlining an individual track of self-regulated learning. General problems regarding analytic geometry, complex coordinates of sets of points, and second-order curves are examined.*

Keywords: *teaching-learning-evaluation, students' individual activity, self-regulated learning, general problems, analytic geometry, complex coordinates, second-order curves.*

*La pensée n'est qu'un éclair,
Au milieu d'une longue nuit,
Mais c'est cet éclair qui est tout.*

Henri Poincaré

Introducere

Necesitatea perfecționării profesionale a cadrelor didactice este implicată de o multitudine de factori care decurg din tendințele actuale spre modernizarea continuă a curriculumului, implementarea tehnologiilor, a metodelor și a formelor noi de predare-învățare-evaluare, deplasarea focalizării pe subiectul învățării etc. [14].

Cercetătorii propun diverse strategii de sporire a calității formării profesionale a profesorilor de matematică: profesionalizarea pregătirii matematice (Brânzei D., Mordkovic A., Șadrikov V., Afanasiev V., Smirnov E. [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 19]); formarea contextual-metodică a profesorilor de matematică (Marcenko M.); pregătirea istorico-metodică a profesorilor de matematică

în universitățile pedagogice (Drobîșev Iu., Poleakova T., Beloborodova S. [16, 17, 21]); aplicarea unui sistem bazat pe îmbogățirea conținuturilor de matematică elementară și didactica matematicii în procesul de recapitulare (Șebanova L. [17, 21]); formarea priceperilor de construire a sistemelor de probleme (Țițeică Gh., Kovaleva G., Koleaghin Iu., Polya G., Fridman L. ș.a. [3, 4, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 22]). În opinia lui A. Papișev, îmbunătățirea calitativă a procesului educațional la matematică se realizează prin trei activități: informare, gestionare și coordonare [20]. Punerea în aplicare a primului dintre aceste aspecte ține de asigurarea continuității factorilor situaționali și semantici de conținut, al doilea – de gestionarea adecvată a pro-

cesului de formare a structurilor cognitive, iar al treilea – în orientarea elevilor spre aplicarea în experiența individuală a unor acțiuni de învățare generalizate, contribuind la selectarea liberă a unor trasee proprii de explorare a cunoștințelor. Nu există o părere unică referitoare la metodologia formării competențelor de rezolvare a problemelor matematice. Unii autori pun pe prim-plan diversificarea metodelor de rezolvare a unei probleme, alții – rezolvarea diferitelor probleme prin aceeași metodă. Deci diferiți autori expun diverse concepții, uneori se întâlnesc opinii opuse.

Autorii prezentului articol susțin următoarea părere:

- Omul nu este capabil să rezolve toate problemele matematice existente, prin urmare trebuie să asimileze un număr suficient de metode de rezolvare pentru a le aplica la diverse probleme.
- Pentru majoritatea elevilor și studenților cu capacități medii este necesar să rezolve mai multe probleme pentru a însuși o metodă.
- Profesorul trebuie să dispună de un număr suficient de probleme cu același grad de dificultate pentru a oferi condiții identice tuturor elevilor (studenților) în procesul de evaluare.
- Problemele propuse pentru lucrul individual trebuie să acopere conținuturile teoretice predate, pentru ca elevul (studentul) să aplice ideile de bază, astfel consolidând materialul teoretic.

Un procedeu eficient de formare a competențelor de rezolvare a problemelor matematice constă în utilizarea problemelor generale. Problemele generale, în mod natural, pot fi compuse în conformitate cu principiile

anterioare. Fenomenele matematice, ca și cele naturale, pot fi divizate în clase. Din această cauză problemele matematice pot fi repartizate după anumite tipuri și fiecare tip se referă la un anumit fenomen și conține anumiți parametri numerici: două probleme concrete de același tip se deosebesc prin valorile acestor parametri. Scopul problemei generale constă în stabilirea anumitor relații ale fenomenului dat cu alte fenomene matematice. Orice capitol matematic trebuie să elucideze relațiile unui fenomen nou cu alte fenomene. Multe din aceste relații pot deveni părți componente ale problemei generale.

În continuare, propunem pentru analiză câteva exemple concrete.

1. Probleme generale în geometria analitică

Prezentăm unele probleme cu caracter general din geometria analitică. Aceste probleme sunt exemple din sarcinile pentru lucrul individual al studenților. Considerăm că în plan și în spațiu sunt fixate sisteme de coordonate carteziane rectangulare.

Problema 1.1. Transformarea de asemănare de genul întâi ψ aplică punctele $A = (1,1)$, $B = (4,5)$ respectiv pe punctele $A' = (-30,-1)$, $B' = (30,10)$.

1.1.1. Scrieți expresiile analitice ale transformării ψ .

1.1.2. Determinați coeficientul de asemănare k al transformării ψ .

1.1.3. Calculați punctul fix C al transformării ψ .

1.1.4. Determinați deplasările f și g pentru care $\psi = H_0^k \circ f = g \circ H_0^k$.

1.1.5. Determinați coordonatele punctelor F și D , pentru care $D = \psi(O) \setminus c$ și $O = \psi(F)$.

1.1.6. Fie l dreapta cu ecuația $x - y + 4 = 0$. Determinați ecuațiile dreptelor

h și p pentru care $h = \psi(l)$ și $l = \psi(p)$.

Problema 1.2. Sunt date patru puncte $A = (3,2)$, $B = (4,3)$, $C = (5,-3)$, $A' = (15,2)$.

1.2.1. Calculați aria S_{ABC} a triunghiului ABC . Determinați orientarea triunghiului ABC .

1.2.2. Determinați un punct E pentru care raportul simplu $(AB,E) = -2/3$.

1.2.3. Calculați produsul scalar al vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} .

1.2.4. Determinați ecuația dreptei (AB) și distanța de la punctul C până la această dreaptă.

1.2.5. Determinați ecuația dreptei l ce trece prin punctul A' perpendicular la dreapta (AC) .

1.2.6. Determinați ecuația medianei m_b duse din vârful B al triunghiului ABC .

1.2.7. Determinați ecuația bisectoarei l_c duse din vârful C al triunghiului ABC .

1.2.8. Determinați punctul H de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC .

1.2.9. Determinați centrul, raza și ecuația cercului ce trece prin punctele A, B, C .

1.2.10. Aflați două puncte P, Q situate de părți diferite și la distanțe egale de la dreapta l .

1.2.11. Vectorul \vec{m} este paralel cu dreapta (AA') și are abscisa egală cu 6. Calculați coordonatele și modulul vectorului \vec{m} .

1.2.12. Calculați coordonatele punctului D , dacă $ABCD$ este un paralelogram.

1.2.13. Calculați coordonatele punctului V , dacă A' este punctul de intersecție ale înălțimilor triunghiului ABV .

Problema 1.3. Sunt date ecuațiile a două drepte:

$$h_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases} \quad h_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

1.3.1. Determinați locul geometric de puncte egal îndepărtate de la dreptele h_1, h_2 .

1.3.2. Calculați unghiul dintre aceste drepte.

1.3.3. Determinați poziția lor reciprocă.

1.3.4. Determinați ecuația dreptei h ce intersectează dreptele h_1 și h_2 și este perpendiculară pe ele. Determinați punctele de intersecție ale dreptei h cu dreptele h_1 și h_2 .

Problema 1.4. În paralelipipedul $ABCD A' B' C' D'$ sunt cunoscute coordonatele vârfurilor $A=(1,2,3)$, $B=(9,6,4)$, $D=(3,0,4)$ și $A'=(5,2,6)$.

1.4.1. Determinați volumul V al paralelipipedului.

1.4.2. Calculați aria bazei A_{ABCD} .

1.4.3. Calculați coordonatele vârfurilor C, B', C', D' .

1.4.4. Calculați ecuația dreptei (CD') .

1.4.5. Calculați ecuația planului (ABC) .

1.4.6. Calculați unghiul dintre dreapta (CD') și planul (ABC) .

1.4.7. Calculați unghiul dintre planele (ABC) și (ABA') .

1.4.8. Determinați punctul E ce împarte segmentul $[AB]$ în raportul $2/3$.

Problema 1.5. În piramida $SABCD$ sunt cunoscute coordonatele vârfurilor $S = (1, 2, 3)$, $A = (9, 6, 4)$, $B = (3, 0, 4)$ și $D = (5, 2, 6)$.

1.5.1. Determinați coordonatele punctului C , dacă $ABCD$ este un trapez cu baza mare DC de două ori mai mare de cea mică AB .

1.5.2. Determinați volumul V al piramidei.

1.5.3. Calculați aria bazei A_{ABCD} și mărimea înălțimii.

1.5.4. Calculați coordonatele produsului vectorial $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.

1.5.5. Calculați ecuația dreptei h ce trece prin punctul S perpendicular la planul bazei $(ABCD)$ și coordonatele punctului de intersecție H a dreptei h cu planul bazei.

Problema 1.6. Este dată o curbă de ordinul doi γ cu un focar $F = (3, 2)$, directoarea respectivă $l: x + y + 5 = 0$ și excentricitatea $e = 2$.

1.6.1. Determinați tipul, ecuația generală și ecuația canonică a acestei curbe.

1.6.2. Calculați un punct situat pe curbă, un punct situat în interiorul curbei și un punct situat în exteriorul curbei.

1.6.3. Determinați o axă de simetrie.

1.6.4. Determinați centrul curbei date.

2. Coordonatele complexe ale unor mulțimi de puncte

Numererele complexe oferă posibilitatea de a dezvălui esența metodelor algebrice în geometrie. Aplicațiile numerelor complexe sunt diverse: teoria funcțiilor de variabilă complexă, funcții analitice, teoria numerelor, mecanică, aero- și hidrodinamică. În geometria plană numerele complexe pot fi utilizate la rezolvarea unor probleme, cunoscând unele formule generale. Selectarea formulilor se face reieșind din relațiile date în ipoteza problemei și concluzii. Simplitatea metodei numerelor complexe este evidentă în comparație cu alte metode, care necesită gândire creativă și o lungă cale de explorare.

Interpretarea geometrică a numerelor complexe este accesibilă elevilor claselor gimnaziale.

Unui număr complex dat în formă algebrică $z = x + yi$ i se asociază un punct $M(x; y)$ în planul de coordonate. Numărul complex z este nu-

mit coordonată complexă a punctului $M(x; y)$ sau *afixul punctului* $M(x; y)$ și se mai notează $M(z)$. Astfel, între mulțimea punctelor planului euclidian și mulțimea numerelor complexe se stabilește o relație biunivocă. Acest plan se numește planul numerelor complexe. Axa Ox se numește axă reală, iar Oy – axă imaginară. Numărul zero este și număr real, și imaginar.

Formulele cele mai simple utile la acest capitol sunt:

2.1. Distanța dintre originea de coordonate și punctul $M(z)$:

$$|OM| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

2.2. Distanța dintre punctele $A(a)$ și $B(b)$: $|AB| = |a - b|$;

2.3. Măsura unghiului orientat dintre vectorul \vec{OM} și sensul pozitiv al axei Ox : $\varphi = \arg z$;

2.4. Punctele $A(a)$ și $B(b)$ simetrice în raport cu axa Ox : $a = \bar{b}$;

2.5. Punctele $A(a)$ și $B(b)$ simetrice în raport cu axa Oy : $a = -\bar{b}$;

2.6. Punctele $A(a)$ și $B(b)$ simetrice în raport cu originea O : $a = -b$;

2.7. Mulțimea punctelor cercului de rază r cu centrul în originea de coordonate: $|z| = r$ sau $z\bar{z} = r^2$;

2.8. Punctul $C(c)$ împarte segmentul AB (unde $A(a)$ și $B(b)$) în raportul λ : $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$;

2.9. Condiții suficiente de coliniaritate a trei puncte $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$: $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, unde $\alpha + \beta = 1$ pentru care $c = \alpha a + \beta b$;

2.10. Ecuația dreptei OA : $\bar{z}a = \bar{a}z$;

2.11. Perpendicularitatea segmentelor AB și CD ($A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $D(d)$):

$$AB \perp CD \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0;$$

2.12. Centroidul unui triunghi cu vârfurile $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$:

$$g = \frac{1}{3}(a+b+c);$$

2.13. Ortocentrul unui triunghi cu vârfurile $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$:

$$h = a + b + c.$$

Aceste formule ne permit să rezolvăm o mulțime de probleme de geometrie plană, inclusiv:

Problema 1. Demonstrați, că ecuația cercului (sau a dreptei) în planul complex poate fi scrisă în forma $az\bar{z} + b\bar{z} - \bar{b}z + c = 0$, unde a și c sunt numere pur imaginare.

Problema 2. Demonstrați că puterea punctului cu coordonata w , în raport cu cercul $az\bar{z} + b\bar{z} - \bar{b}z + c = 0$, este egală cu $\frac{\bar{w}w}{a} + \frac{b}{a}w - \frac{\bar{b}}{a}\bar{w} + \frac{c}{a}$.

Problema 3. Demonstrați că trei puncte cu coordonatele z_0, z_1, z_2 sunt coliniare, atunci și numai atunci când

$$\frac{z_0 - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}.$$

Problema 4. Demonstrați că dreapta care trece prin punctele cu coordonatele z_1, z_2 este locul geometric al punctelor cu coordonata z , pentru care are loc relația

$$\frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}.$$

Problema 5. Demonstrați că, dacă suma pătratelor laturilor unui patrulater este egală cu suma pătratelor diagonalelor lui, atunci acest patrulater este un paralelogram.

Teorema lui Ptolomeu: Suma produselor lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater înscris în cerc este egală cu produsul lungimilor diagonalelor sale.

Demonstrație. Fie patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc de rază R cu centrul O . Alegem un sistem de coordonate cu originea în centrul O , iar raza \overline{OA} – semiaxa pozitivă a axei absciselor. Vârfurile B, C și D vor fi considerate imagini ale numerelor complexe x, y, z modulul cărora este egal cu R , iar argumentii principali sunt respectiv α, β, γ . Punctul $A(R)$ are argumentul principal nul. Vom demonstra, că $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$, sau:

$$|x - R| \cdot |y - z| + |z - R| \cdot |y - x| = |y - R| \cdot |z - x|. (*)$$

Calculăm separat modulul diferențelor: $|x - R| = |R(\cos \alpha + i \sin \alpha) - R| = R|\cos \alpha - 1 + i \sin \alpha| = R\sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$

$$|y - R| = 2R \sin \frac{\beta}{2}; \quad |z - R| = 2R \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$|y - x| = \left| z \left(\frac{y}{z} - 1 \right) \right| = \left| z \left(\frac{\cos \beta + i \sin \beta}{\cos \alpha + i \sin \alpha} - 1 \right) \right| =$$

$$R|\cos(\beta - \gamma) + i \sin(\beta - \gamma) - 1| = 2R \sin \frac{\gamma - \beta}{2};$$

$$|y - x| = 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}; \quad |z - x| = 2R \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Atunci egalitatea (*) va avea forma:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Pentru a demonstra egalitatea utilizăm formula pentru sinusul diferenței a două unghiuri. [15, p.99]

3. Curbe de ordinul doi

Problema 1. Poziția reciprocă a dreptelor și a curbelor de ordinul doi.

Fie dată ecuația curbei de ordinul doi

$$C: a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + a_6 = 0 \quad (1)$$

și ecuațiile parametrice ale dreptei

$$d: \begin{cases} x = at + m, \\ y = bt + n. \end{cases} \quad (2)$$

Pentru a afla punctele de intersecție ale curbei cu dreapta se rezolvă sistemul compus din ecuațiile respective. Prin înlocuirea valorilor variabilelor x și y în ecuația (1) obținem o ecuație de gradul doi în raport cu parametrul t : $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. (3)

1. Dacă $P \neq 0$ avem o ecuație de gradul doi. Ea poate avea două soluții reale distincte $x_1 \neq x_2$, atunci există două puncte de intersecție – dreapta este secantă. Dacă ecuația (3) pentru $P \neq 0$ are o singură soluție, adică $x_1 = x_2 \in R$, dreapta este tangentă la curbă. Dacă ecuația (3) pentru $P \neq 0$ nu are soluții reale, există două soluții complexe conjugate, a căror medie aritmetică este un număr real. Interpretarea geometrică presupune existența a două puncte comune imaginare, iar mijlocul segmentului cu aceste extremități este un punct real.
2. Dacă $P = 0$ și $Q \neq 0$ obținem ecuația de gradul I $2Qt + R = 0$. Pentru $R \neq 0$ ecuația $2Qt + R = 0$ are soluția reală unică $t = -\frac{R}{2Q}$.

În acest caz, dreapta și curba au un singur punct de intersecție – dreapta „străpunge” curba.

3. Dacă $P = 0$, $Q = 0$ și $R \neq 0$ ecuația nu are soluții reale sau complexe. În acest caz, dreapta este asimptotă la curbă.
4. Dacă $P = 0$, $Q = 0$ și $R = 0$. În acest caz, curba degenerază în două drepte, iar una din ele este dreapta dată.

Este interesantă problema privind poziția reciprocă a două curbe.

Problema 2. Poziția reciprocă a două cercuri.

Rezolvarea formală se reduce la aflarea soluțiilor unui sistem de două ecuații de gradul doi:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r_1^2, \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + r_2^2 - r_1^2 + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0, \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2. \end{cases} \quad (4)$$

Am redus problema la aflarea punctelor de intersecție a cercului ω_2 cu o dreaptă l .

Ce poziție are dreapta l față de cerc? Aceasta este dreapta radicală a cercurilor ω_1 și ω_2 .

Cum poate fi definită axa radicală a două cercuri?

Fie A un punct care aparține unei drepte care intersectează cercul.

Se știe că $AB \cdot AC = const$, $p(A, \omega) = AO^2 - r^2$.

Dacă sunt date două cercuri ω_1, ω_2 , atunci axa radicală este totalitatea punctelor cu puteri egale.

Axa radicală, dacă există, este perpendiculară pe linia centrelor. Deci este suficient să găsești un punct pe ea. Dacă cercurile date se intersectează, atunci punctele comune aparțin axei radicale. Dacă cercurile date nu se intersectează, atunci construim un cerc ω_3 cu centrul $O_3 \notin (O_1O_2)$ care intersectează ambele cercuri ω_1, ω_2 . Deci vom avea axa radicală l_1 a cercurilor ω_1, ω_3 și axa radicală l_2 a cercurilor ω_2, ω_3 . Punctul de intersecție $M \in l_1 \cap l_2$ este centrul radical al cercurilor $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ și aparține axei radicale a cercurilor ω_1, ω_2 .

Evident că de aceste tipuri pot fi compuse foarte multe probleme.

Acest fapt poate fi folosit la compunerea sarcinilor pentru activitatea individuală a studenților.

În legătură cu tendințele integrării într-o Europă a cunoașterii, T. Callo menționează: „*Profesorul European trebuie să aibă o imagine integrală referitor la rolul său în educarea elevului, atât prin disciplina predată, cât*

și printr-o formare generală globală în ritmul accelerat al secolului” [2, p. 124].

Accentul pus pe cunoașterea metodelor de rezolvare a problemelor generale nu constituie o axare pe „metodism” în exces, ci crearea infrastructurii necesare pentru demararea unui studiu de calitate a matematicii.

Referințe bibliografice

1. Brânzei D., Anița S., *Bazele raționamentului geometric*, Iași, Editura Academiei, 1983.
2. Callo T., *O pedagogie a integralității. Teorie și practică*, Chișinău, USM, 2007.
3. Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*. București, Editura tehnică, 1977.
4. Cioban M., Cioban-Pilețcaia A., *Despre relații metrice între elementele unui triunghi*, Delta 1, 2007, p. 3-14.
5. Ciobanu M., Sali L., *Considerații asupra cvadraturii și descompunerii poligoanelor*. În: *Materialele Conferinței Internaționale „Învățământul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani”*, volumul II „Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii și Fizicii”, Chișinău, 2010.
6. Ciobanu M., Sali L., *Considerații asupra măsurării mărimilor geometrice*. În: *Materialele Conferinței Internaționale „Învățământul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani”*, volumul II „Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii și Fizicii”, Chișinău, 2010.
7. Courant R., Robbins H., *What is Mathematics?*, New York, Oxford University Press, 1996.
8. Miron R., Brânzei D., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, București, Editura Academiei Române, 1983.
9. Miron R., *Geometrie elementară*, București: EDP, 1968.
10. Polya G., *Cum rezolvăm o problemă*, București, EDP, 1965.
11. Polya G., *Descoperirea în matematică*, București, EDP, 1971.
12. Polya G., *Matematica și raționamentele plauzibile*, vol. I și II, București, Editura Științifică, 1962.
13. Țițeică Gh., *Probleme de geometrie*, București, Editura tehnică, 1981.
14. Vlăsceanu L. (coord.), *Școala la răscruce – Schimbare și continuitate în curriculumul învățământului obligatoriu. Studiu de impact*, Iași, Editura Polirom, 2002.
15. *Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс/ А.М.Абрамов, Н.Я.Виленикин, Г.В.Дорофеев и др., Сост.: С.И.Цварцбургд. – Москва, 1980.*
16. Ковалева Г. И., *Теория и практика обучения будущих учителей математики конструированию систем задач*, Волгоград, 2012.
17. Коголовский С.П., *Развивающее обучение математике как опережающее обучение*, Иваново, 2010.
18. Колягин Ю.М., *Задачи в обучении математике*, Москва, Просвещение, 1977.
19. Лупу И., Чобан-Пилецкая А., *Мотивация обучения математике*, Кишинэу, 2008.
20. Папышев А., *Теоретико-методологические основы обучения учащихся решению математических задач в контексте деятельностного подхода*. Автореферат диссертации на соискание степени доктора педагогических наук по специальности 13.00.02 Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования), Саранск, 2012.
21. Родионов М.А., Марина Е.В., *Развивающий потенциал математических задач и возможность его актуализации в учебном процессе*, Пенза, 2010.
22. Фридман Л.М., *Как научиться решать задачи: Книга для учащихся старших классов средней школы*, Москва, Просвещение, 1989.